

## Numerische Qualität von FEM-Analysen Vergleich der h- und p-Methode



Dr. Stefan Reul, PRETECH GmbH

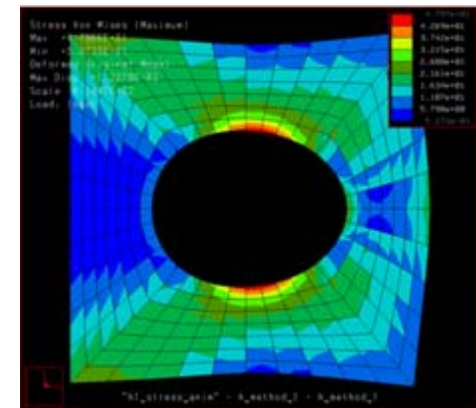
## Diskussionspunkte

- » Problemstellung
- » Numerische Fehler
- » h-Methode
- » p-Methode
- » Modellierungs-Beispiele
- » Vergleiche
- » Schlussfolgerungen



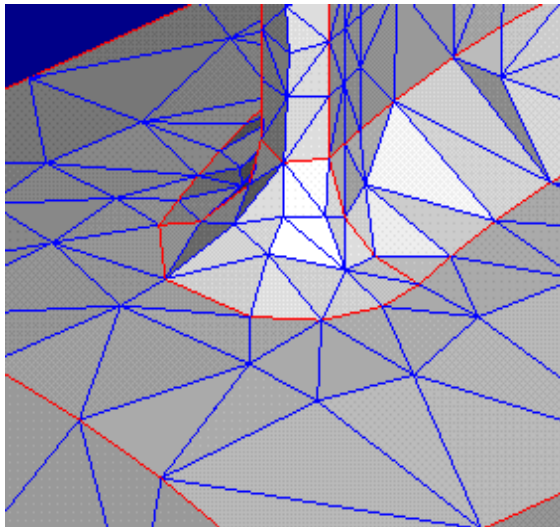
## Problemstellung

- » Etwa 90 % aller Analysen sind linear-elastische Aufgabenstellungen
- » Leicht vermeidbare Fehlerarten sind Geometrie, Lagerung, Lasten und Materialeigenschaften
- » Nach unserer Erfahrung werden überwiegend numerische Fehler gemacht:
  - Typische Verformungsfehler: 5 % bis 20 %
  - Typische Spannungsfehler: 10 % bis über 50 %
- » Konventionelle h-FEM-Systeme unterstützen den Anwender nur teilweise bei der Vermeidung von numerischen Fehlern
- » Die p-Methode weist systembedingt auf diese Fehler hin und reduziert sie
- » Nachfolgend werden mögliche numerische Fehler bei der h- und p-Methode diskutiert und bewertet

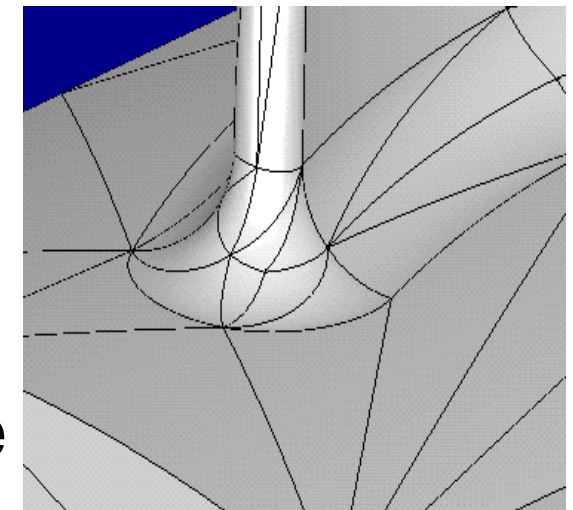


## Numerische Fehler I

- » Analysenart (z.B. keine Theorie großer Verformungen)
- » Elementwahl (z.B. falsche Spezial-Elemente, TET4 gegen TET10)
- » Zu grobe Elementierung (z.B. kein automatisches Re-Meshing)
- » Ungünstige Elementkanten-Winkel
- » Fehler Auswertung: Integrationspunkte  $\leftrightarrow$  gemittelte Spannungen
- » Elemente folgen nicht der Geometrie (z.B. durch Polygonzüge)



h-Methode



p-Methode

## Numerische Fehler II

» Singularitäten bezüglich der Verformungen (Last ↔ Lagerung)

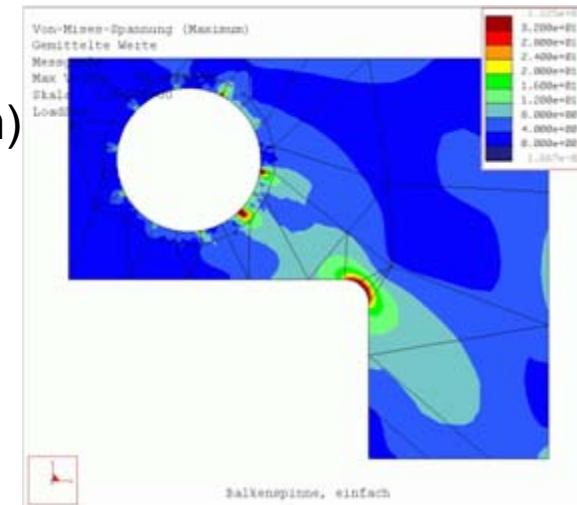
	Volumen-Elemente	Schalen-Elemente	Balken-Elemente
Flächen-Last	OK	OK	n.a.
Linien-Last	OK	OK	OK
Punkt-Last	singulär	OK	OK

» Singularitäten bezüglich der Spannungen (Last ↔ Lagerung)

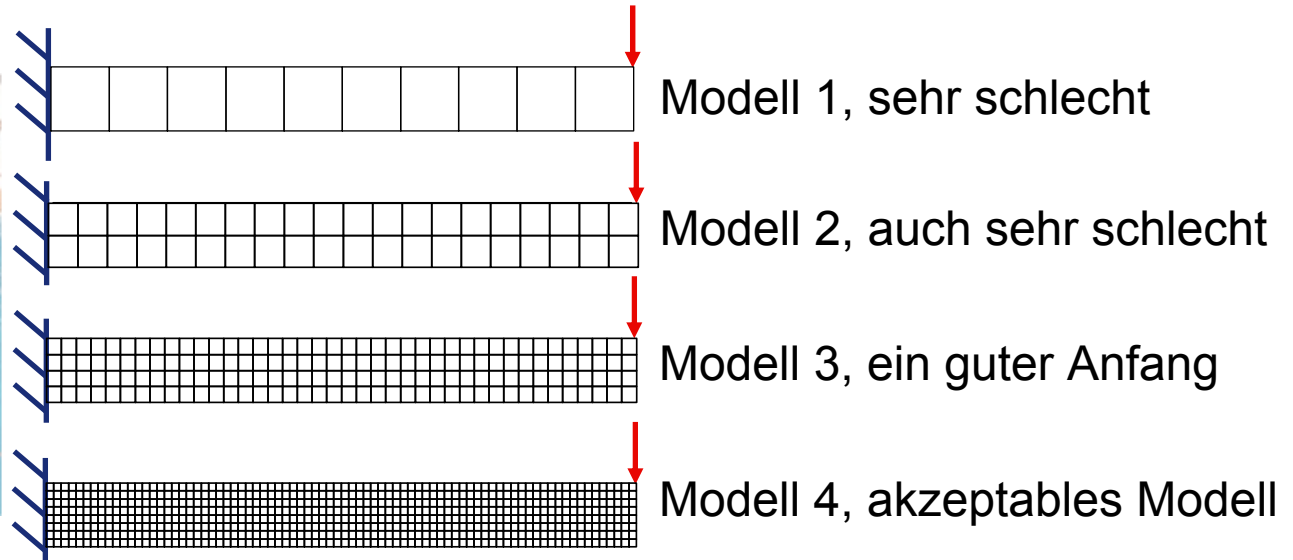
	Volumen-Elemente	Schalen-Elemente	Balken-Elemente
Flächen-Last	OK	OK	n.a.
Linien-Last	singulär	OK	OK
Punkt-Last	singulär	singulär	OK

## Numerische Fehler III

- » Weitere Singularitäten bezüglich der Spannungen:
  - Vorspringende Kanten (2D und 3D; nachweisbar schon bei kleinen Winkeln !)
  - Lagerungen mit Dehnungsbehinderung (wie z.B. 90° vorspringende Kanten)
  - Steifigkeitssprünge (z.B. Kleber/Metall)
  - Krümmungssprünge in Kontaktstellen (trotz tangentialen Übergang zu Radien !)
- » Weitere Singularitäten bezüglich der Verformungen und Spannungen:
  - Balken-Volumen (→ punktförmige Last !)
  - Schalen-Volumen (singulär bezüglich der Spannungen)
- » Schlecht konvergierende Bereiche:
  - ‚Sattelflächen‘
- » Weitere mögliche Fehlerquellen:
  - Starre Verbindungen (ungewollte Aussteifung)

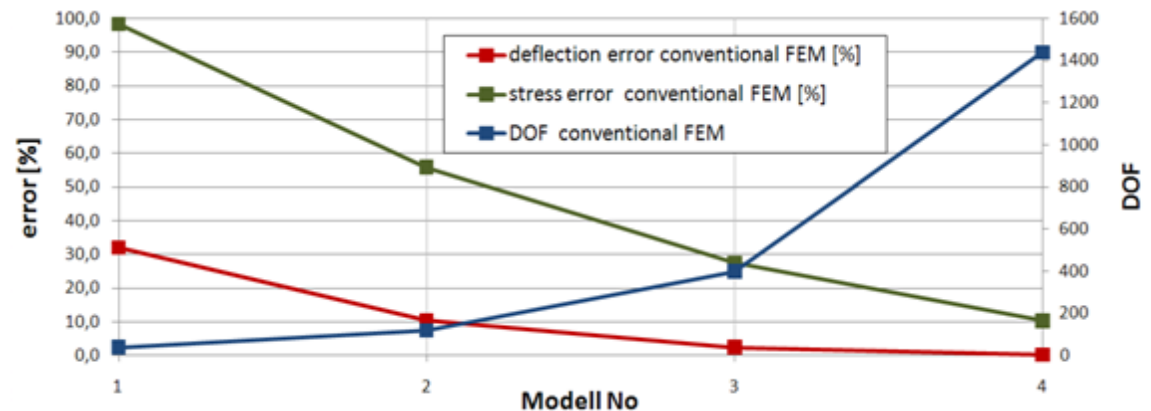


## Finite Elemente h-Methode



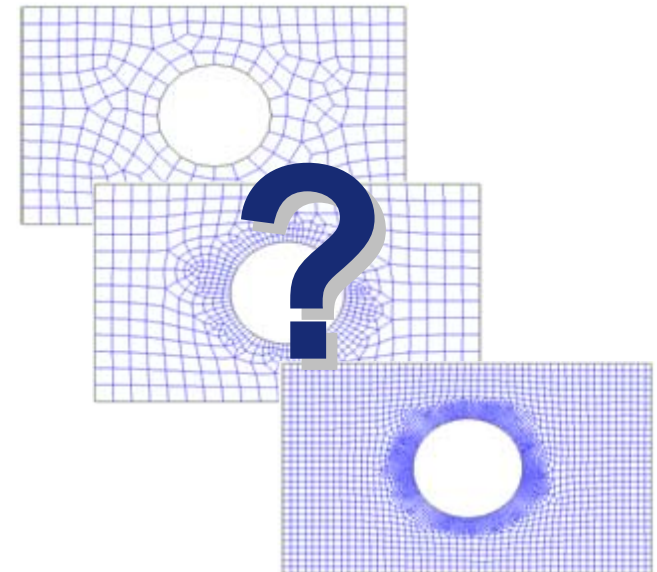
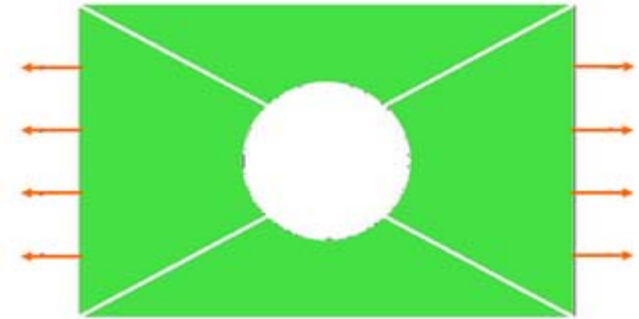
Beam size: 10" x 1" x 1"  
Modulus of elasticity: 30,000,000 psi  
Load: 150 lb. at tip

Beam theory max deflection: **0.2"**  
Beam theory max stress: **90,000 psi**



## Geometrie Elemente p-Methode III

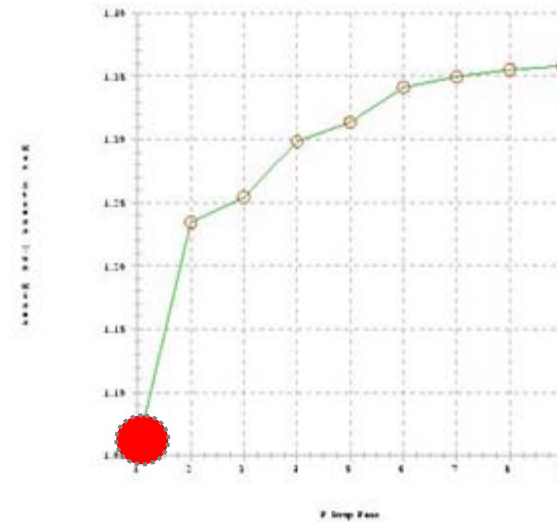
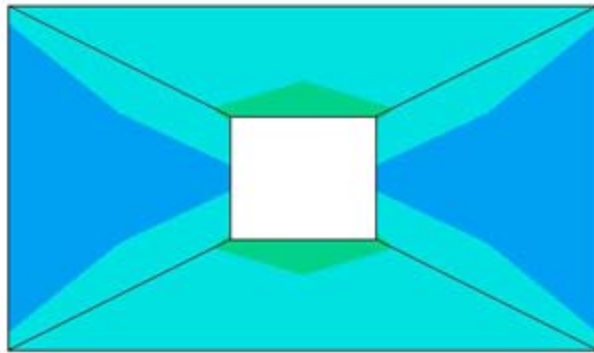
- » Elemente folgen exakt der Geometrie
- » Es wird - nur dort wo es nötig ist – die Ansatzfunktion automatisch gesteigert  
→ adaptive GEM-p-Methode
- » Die p-Methode kann dadurch automatisch für jeden Lastfall die optimale/korrekte p-Verteilung einstellen
- » Gesteuert wird dies durch vorgegebene Konvergenzkriterien, z.B. RMS Spannungen kleiner 10 % oder Verschiebungen kleiner 1 %
- » Dadurch kann eine Platte mit Loch durch nur 4 Elemente abgebildet werden !





## P-Methode I

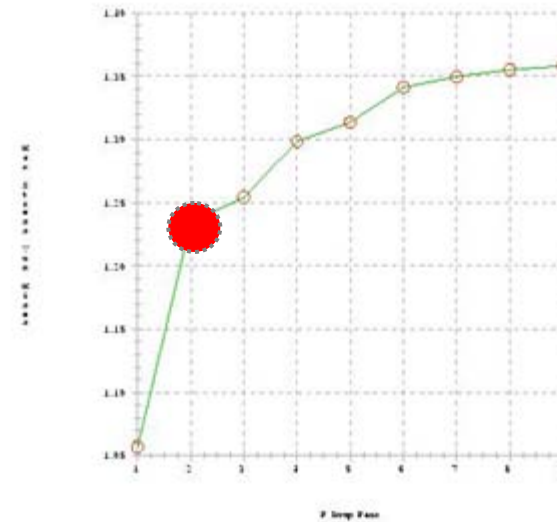
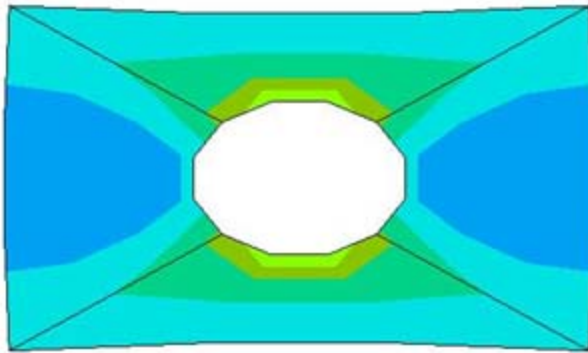
1st PASS



Polynomial order 1 ( $Y=AX+B$ )

## P-Methode II

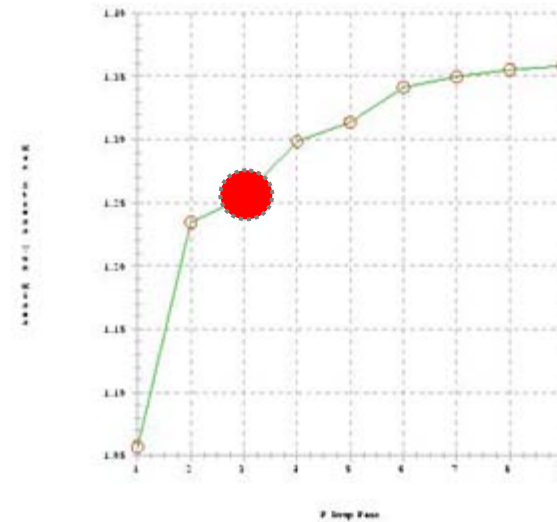
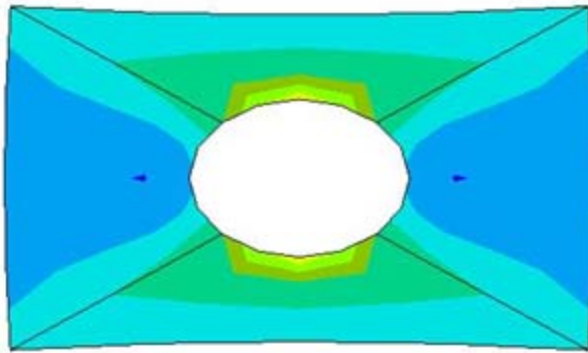
2nd PASS



Polynomial order 2 ( $Y=AX^2+BX+C$ )

## P-Methode III

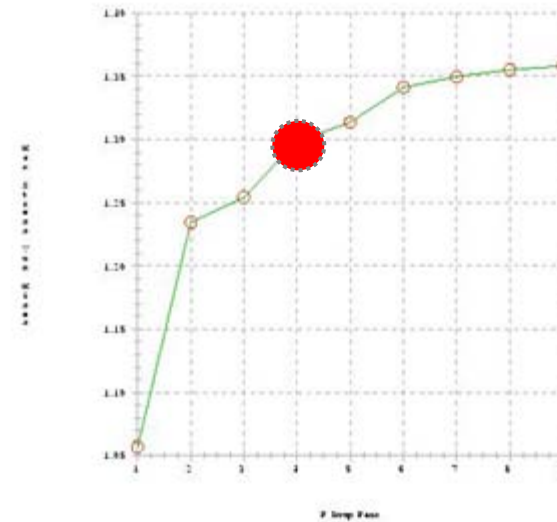
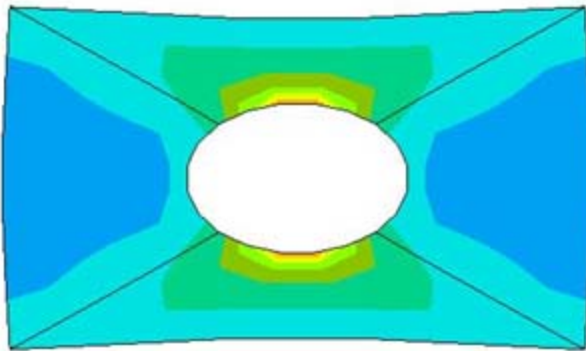
3rd PASS



Polynomial order 3 ( $Y=AX^3+BX^2+CX+D$ )

## P-Methode IV

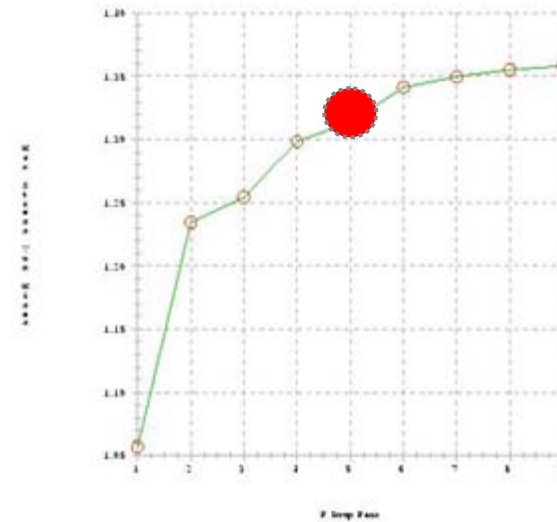
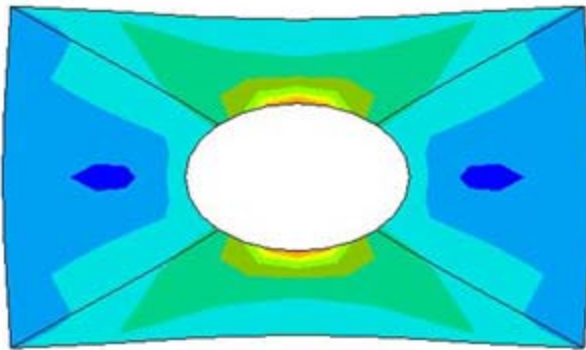
4th PASS



Polynomial order 4 ( $Y=AX^4+BX^3+CX^2+DX+E$ )

## P-Methode V

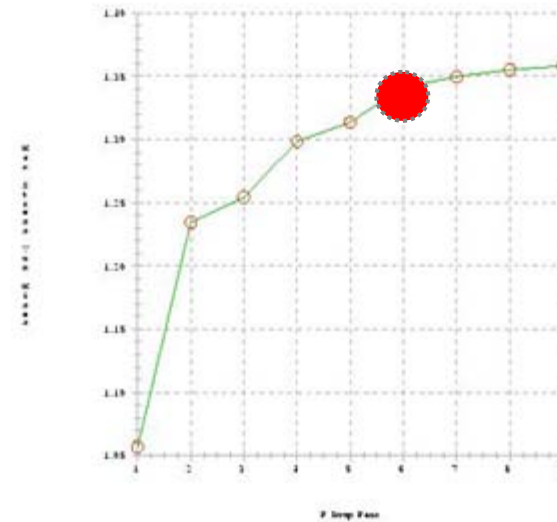
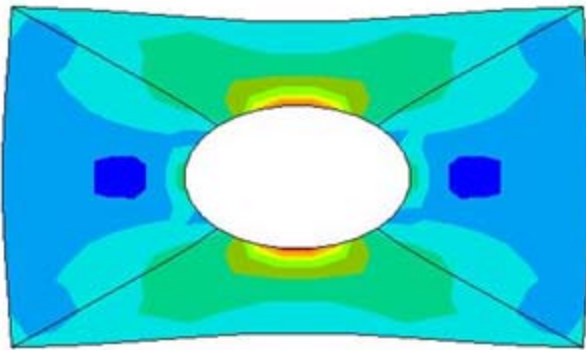
5th PASS



Polynomial order 5 ( $Y=AX^5+BX^4+CX^3+....+F$ )

## P-Methode VI

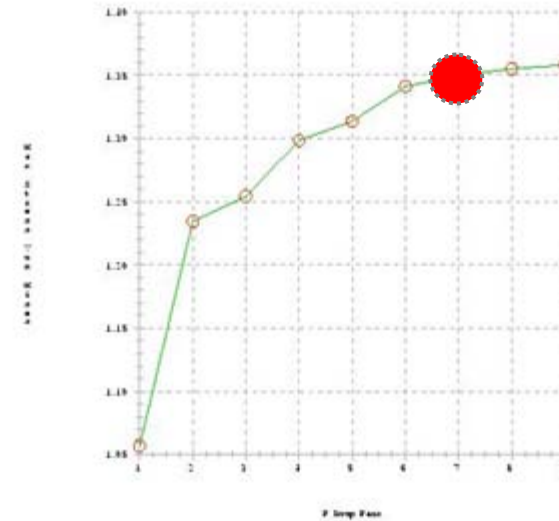
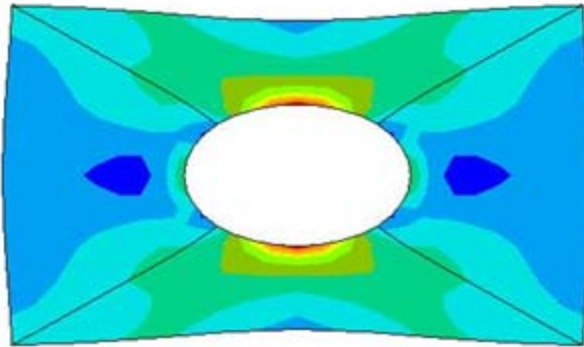
6th PASS



Polynomial order 6 ( $Y=AX^6+BX^5+CX^4+\dots+G$ )

## P-Methode VII

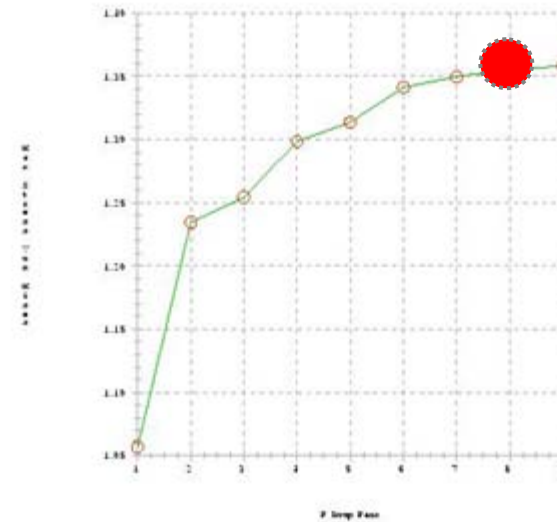
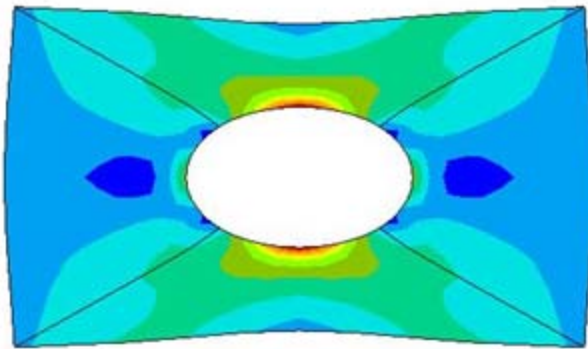
7th PASS



Polynomial order 7 ( $Y=AX^7+BX^6+CX^5+....+H$ )

## P-Methode VIII

8th PASS

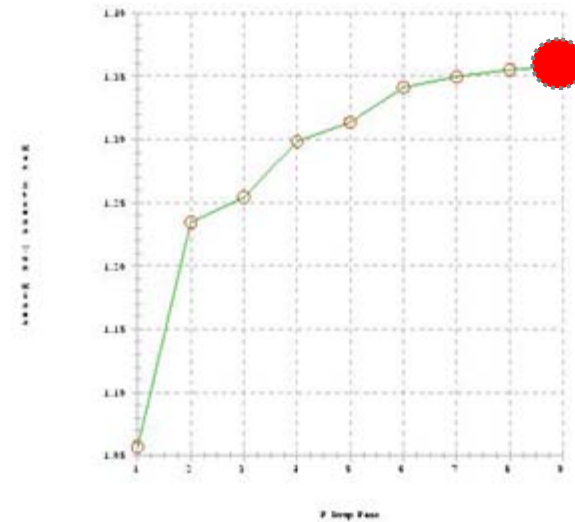
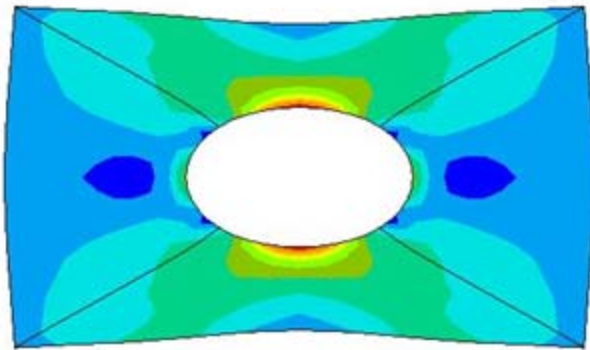


Polynomial order 8 ( $Y=AX^8+BX^7+CX^6+....+I$ )



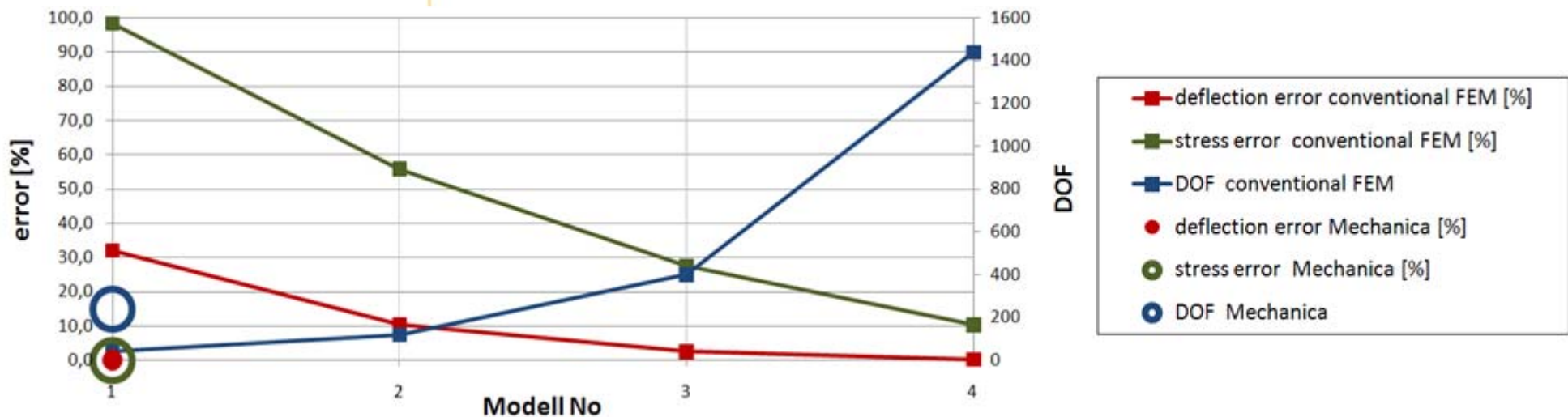
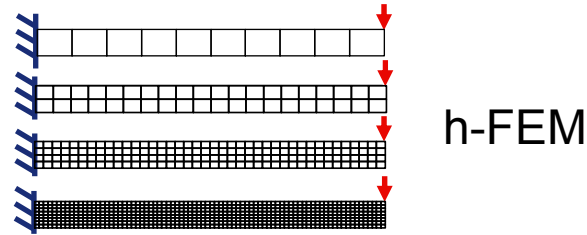
## P-Methode IX

9th PASS



Polynomial order 9 ( $Y=AX^9+BX^8+CX^7+\dots+J$ )

## P-Methode X (Fehlervergleich – DOF)



## Geometrie Elemente p-Methode I

### » Literaturstellen u.a.:

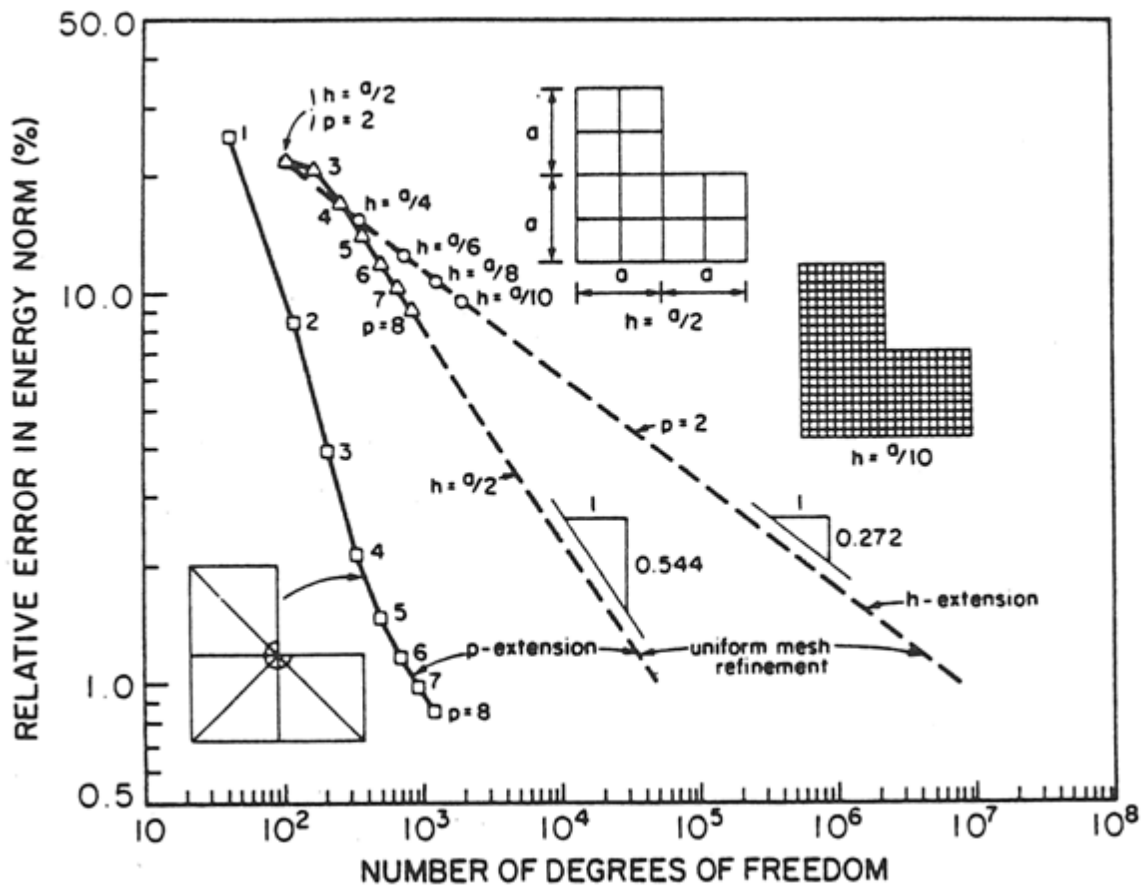
- *Mesh Design for the p-Version of the Finite Element Method*; Barna A. Szabó; veröffentlicht in *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 55 (1986), 181-197, North-Holland
- *Computational Aspects of the h, p and h-p Version of the Finite Element Method*; Ivo Babuska; veröffentlicht in *Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations*, Publ. IMACS, 1987
- *Quality Assurance in the Numerical Simulation of Mechanical Systems*; Barna A. Szabó, Preprint 01.08.2000; veröffentlicht in *Computational Mechanics for the Twenty First Century*, Saxe-Coburg Publ., Edinburgh, U.K.

### » Typische Vertreter der p-Methode:

- Pro/ENGINEER MECHANICA (für Konstrukteure und Entwickler)
- StressCheck (für Spezialisten, Weiterentwicklung der in den obigen Literaturstellen benutzten Systeme)

## Geometrie Elemente p-Methode II

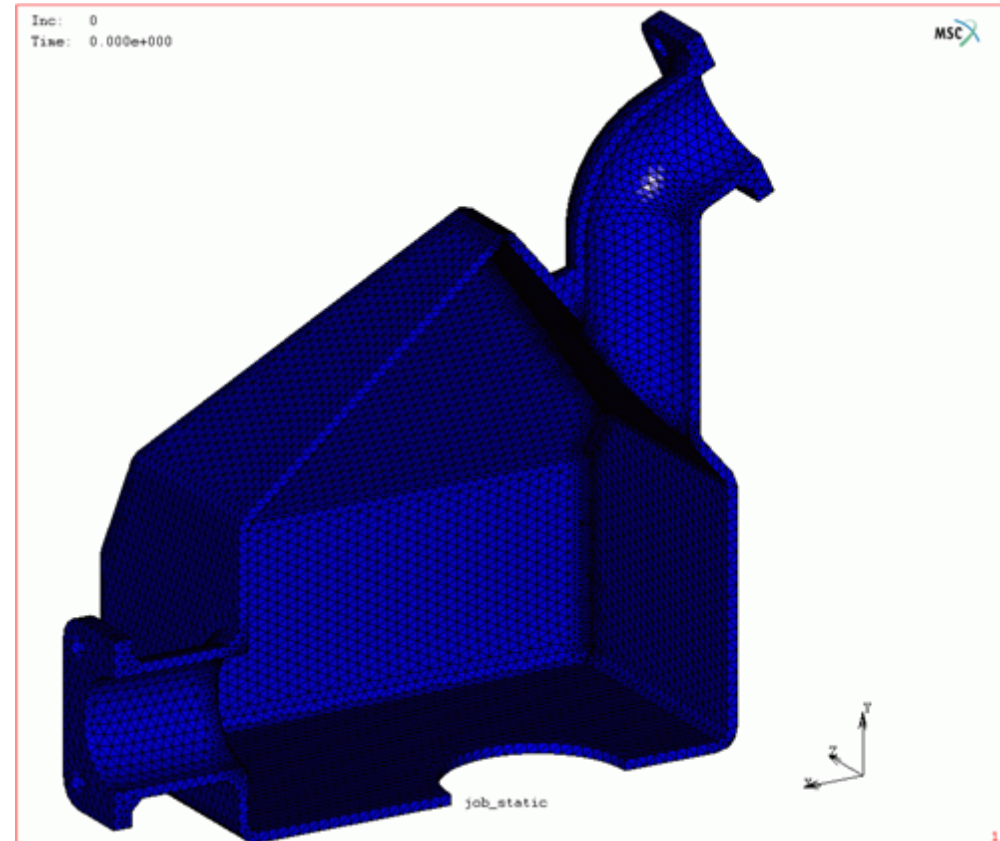
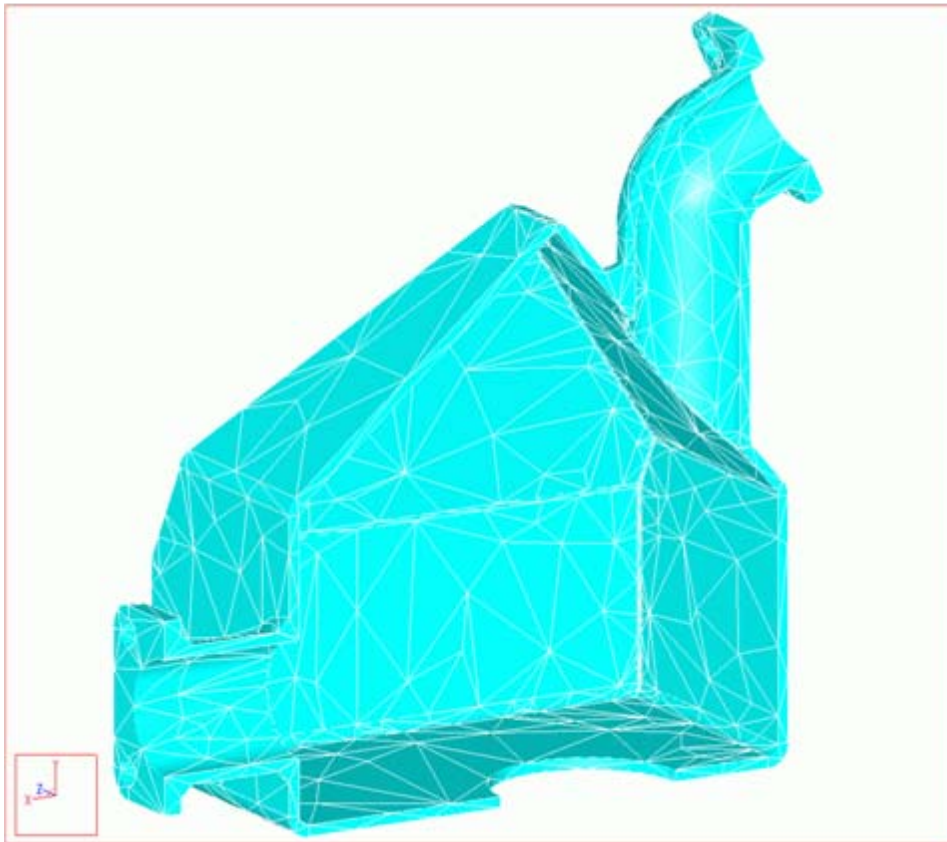
- » Energy Norm als Funktion der DOF für h- und p-Methode (nach Szabó)



## Beispiel Tank-Analyse I

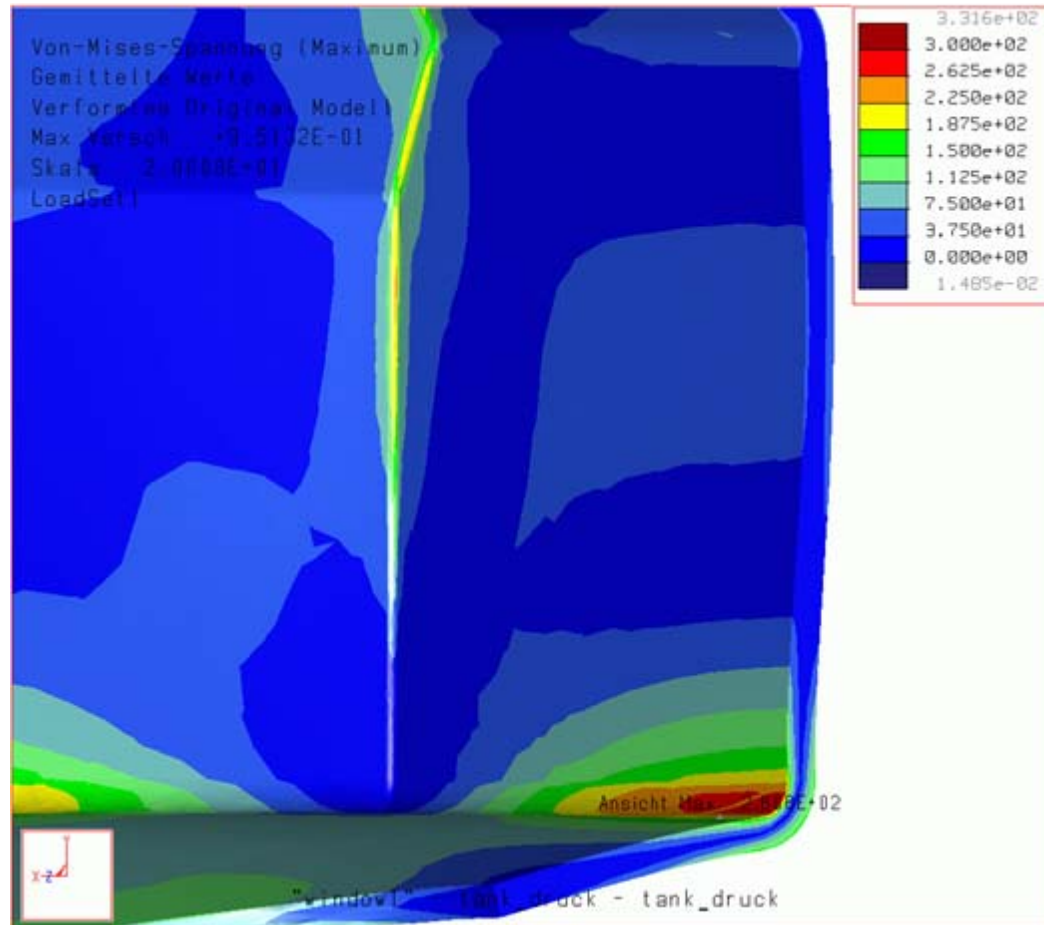
» MECHANICA-Netz (232.454 DOF)

MARC-Netz (68.409 DOF)



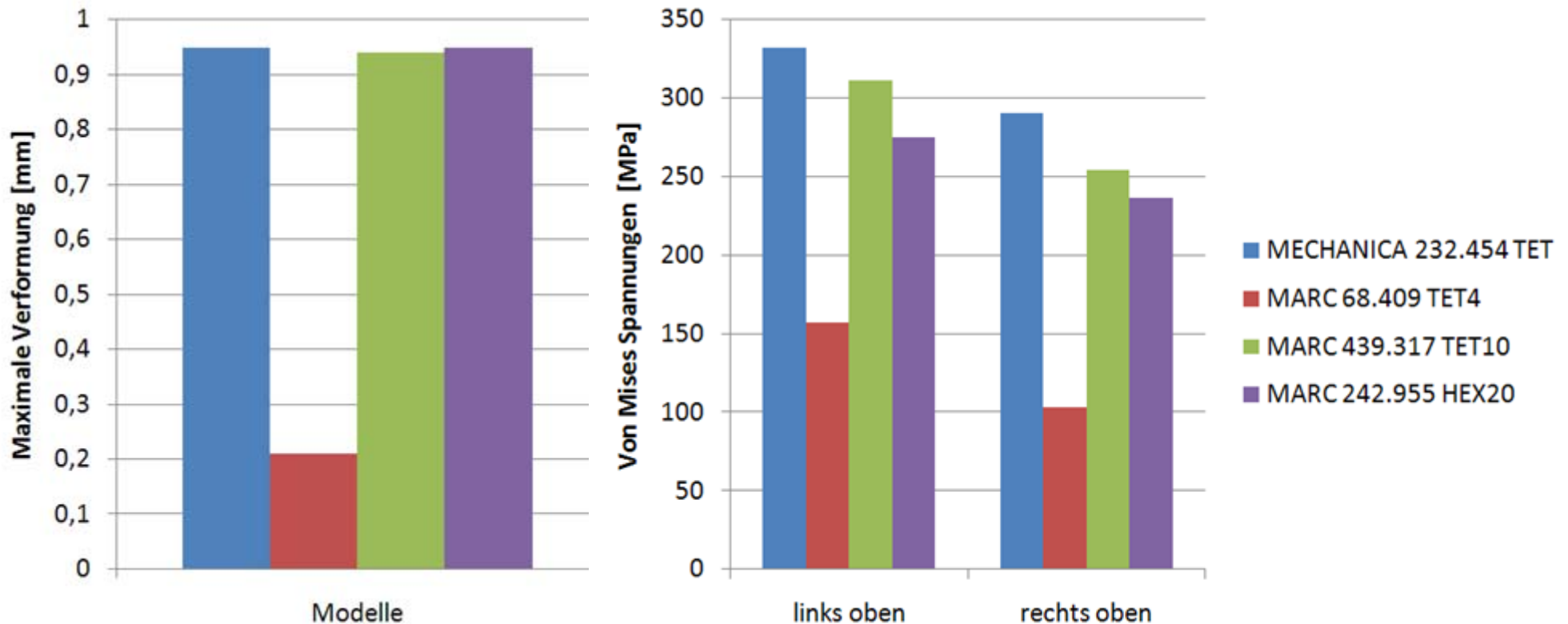
## Beispiel Tank-Analyse II

- » Spannungen ‚rechts unten‘ für MECHANICA-Modell: max. 281 MPa



## Beispiel Tank-Analyse III

» Vergleich: max. Verformungen und max. Von Mises Spannungen



## Schlussfolgerungen

- » Die numerische Qualität von FEM-Analysen ist stets zu prüfen
- » Numerische Fehler sind weit verbreitet und stellen ein erhebliches Haftungsrisiko für Firmen dar
- » Die h-Methode ergibt - fast - immer zu geringe Spannungen
- » Bei sorgfältiger Arbeit erzielen die h- und p-Methode stets - fast - gleiche Ergebnisse
- » Vorteile der p-Methode:
  - Benötigt etwa 3-5-mal weniger DOF bei gleicher numerischer Qualität
  - Dadurch können sehr große Modelle gerechnet werden
  - Erkennt Singularitäten (Messungen definieren !)
  - Besonders gut geeignet für exakte linear-elastische Analysen (z.B. bei der Spannungsdruckmethode für Schweißstellen)
  - Unterstützt Anwender bei Beurteilung der numerischen Qualität



Ich freue mich auf Ihre  
Diskussionsbeiträge !



Dr. Stefan Reul, PRETECH GmbH

## Beispiel Tank-Analyse III

» Vergleich: max. Verformungen und max. Von Mises Spannungen

Programm/ Freiheitsgrade	Position	Von Mises Spannungen [MPa]	Maximale Verformung [mm]
MECHANICA, 232.454 TET	links oben	332 (100 %)	0,95 (100 %)
	rechts oben	290 (100 %)	
MARC, 68.409 TET4	links oben	157 (47 %)	0,21 (22 %)
	rechts oben	103 (35 %)	
MARC, 439.317 TET10	links oben	311 (94 %)	0,94 (99 %)
	rechts oben	254 (88 %)	
MARC, 242.955 HEX20	links oben	275 (83 %)	0,95 (100 %)
	rechts oben	236 (81 %)	